PaideiaNet.com

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΒΟΗΘΗΜΑ • Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

2026

Πλήρεις Αναλυτικές Λύσεις

Μεθοδολογία • Θεωρία • Συχνά Λάθη • Εξεταστικές Παρατηρήσεις

- Μεθοδολογία
- Θεωρία
- Συχνά Λάθη
- Συμβουλές
- Βαθμολογική Στρατηγική

«Προετοιμάσου σωστά, ξεχώρισε στις εξετάσεις!»

PAIDEIANET.COM

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026

Κανονικές & Επαναληπτικές

Πλήρεις αναλυτικές λύσεις με Μεθοδολογία, Θεωρία,
Συχνά Λάθη και Εξεταστικές Παρατηρήσεις.

PaideiaNet.com
«Προετοιμάσου σωστά, ξεχώρισε στις εξετάσεις!»

Πώς να διαβάσεις αυτό το βοήθημα

Κάθε ερώτημα αναλύεται με μια σταθερή δομή πέντε βημάτων, ώστε να μη μένει καμία απορία και να καλλιεργείς εξεταστική τεχνική, όχι απλή απομνημόνευση:

🎯 **Τι εξετάζει**
Η βασική μαθηματική ιδέα του ερωτήματος — τι πραγματικά σου ζητείται.

📚 **Θεωρία που χρησιμοποιείται**
Τα θεωρήματα, οι ορισμοί και οι τεχνικές που πρέπει να ξέρεις για να το λύσεις.

✍️ **Αναλυτική Λύση**
Η πλήρης λύση, βήμα προς βήμα, χωρίς παραλείψεις, με σωστή στοιχειοθεσία των μαθηματικών.

⚠️ **Συχνό Λάθος**
Τα πιο συνηθισμένα λάθη των μαθητών — και πώς να τα αποφύγεις.

💡 **Εξεταστική Συμβουλή**
Πρακτική οδηγία βαθμολόγησης ή στρατηγικής για να κερδίσεις (ή να μη χάσεις) μονάδες.

Στο τέλος κάθε Θέματος υπάρχει σύνοψη **«Τι έπρεπε να προσέξεις»**, και στο τέλος του βιβλίου ανασκόπηση εξετάσεων, κατάλογος θεωρημάτων, δείκτης δυσκολίας και χώρος σημειώσεων.

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

03/06/2026

ΘΕΜΑ Α Θεωρία — Απόδειξη, Κριτήριο, Ορισμός, Σωστό/Λάθος

Α1 — Απόδειξη — f′ = 0 ⟹ f σταθερή (Πόρισμα Θ.Μ.Τ.)

🎯 **Τι εξετάζει**

Ζητείται η απόδειξη ότι, αν μια συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα διάστημα Δ είναι συνεχής στο Δ με $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο, τότε η *f* είναι σταθερή.

📚 **Θεωρία που χρησιμοποιείται**

Θεώρημα Μέσης Τιμής: αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha)$.

✍️ **Αναλυτική Λύση**

Έστω x_1,x_2 δύο τυχαία σημεία του Δ με $x_1<x_2$. Η *f* είναι:

- συνεχής στο $[x_1,x_2]$ (αφού είναι συνεχής στο Δ), και
- παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) (αφού $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο).

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)=0\cdot(x_2-x_1)=0$$

Άρα $f(x_2)=f(x_1)$. Επειδή τα x_1,x_2 είναι τυχαία σημεία του Δ, η *f* είναι σταθερή σε όλο το Δ.

⚠️ **Συχνό Λάθος**

Μην ξεχνάς ότι το Θ.Μ.Τ. απαιτεί συνέχεια στο $[x_1,x_2]$ ΚΑΙ παραγωγισιμότητα στο (x_1,x_2). Εδώ η $f'(x)=0$ εξασφαλίζει και τα δύο.

💡 **Εξεταστική Συμβουλή**

Η απόδειξη είναι σύντομη (5 σειρές). Πρόσεξε να τονίσεις ότι x_1,x_2 είναι ΤΥΧΑΙΑ σημεία — αυτό εξασφαλίζει ότι $f(x_1)=f(x_2)$ ισχύει για ΟΛΕΣ τις τιμές.

Α2 — Κριτήριο Παρεμβολής

🎯 **Τι εξετάζει**

Ζητείται η διατύπωση του Κριτηρίου Παρεμβολής (Sandwich / Squeeze Theorem).

✍ **Αναλυτική Λύση**

Αν $g(x) \le f(x) \le h(x)$ σε μια περιοχή του x_0 (εκτός ίσως του x_0) και

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$$

τότε υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

⚠ **Συχνό Λάθος**

Η ανισότητα $g(x) \le f(x) \le h(x)$ πρέπει να ισχύει ΚΟΝΤΑ στο x_0 (σε μια περιοχή), όχι απαραίτητα παντού. Η τιμή στο ίδιο το x_0 δεν μας ενδιαφέρει.

💡 **Εξεταστική Συμβουλή**

Γράψε πρώτα τις υποθέσεις (ανισότητα + ίσα όρια g,h) και μετά το συμπέρασμα (υπάρχει το όριο της f και ισούται με ℓ).

A3 — Ορισμός παράγουσας (αρχικής συνάρτησης)

🎯 **Τι εξετάζει**

Ζητείται ο ορισμός της αρχικής συνάρτησης (παράγουσας) μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ.

✍ **Αναλυτική Λύση**

Μια συνάρτηση F ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της *f* στο Δ, αν $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

⚠ **Συχνό Λάθος**

Η σχέση $F' = f$ ισχύει για ΚΑΘΕ x του Δ, όχι μόνο σε κάποια σημεία. Η F ορίζεται στο ΙΔΙΟ διάστημα Δ.

💡 **Εξεταστική Συμβουλή**

Ο ορισμός είναι σύντομος αλλά ακριβής — μην παραλείψεις τη φράση «για κάθε $x \in \Delta$».

A4 — Σωστό / Λάθος

🎯 Τι εξετάζει

Πέντε προτάσεις Σωστού/Λάθους σε ιδιότητες συναρτήσεων, παράγωγος αλυσίδας, τριγωνομετρία.

✍️ Αναλυτική Λύση

α) **Λάθος.** Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν ΔΕΝ υπάρχουν διαφορετικά σημεία με ίδια τεταγμένη. Η πρόταση λέει το αντίθετο.

β) **Σωστό.** Παραγωγισιμότητα σε σημείο $\Longrightarrow$ συνέχεια στο σημείο (γνωστό θεώρημα).

γ) **Σωστό.** $f''(x)>0 \;\Longrightarrow\; f'$ γνησίως αύξουσα $\Longrightarrow$ f κυρτή (κριτήριο κυρτότητας).

δ) **Σωστό.** Κανόνας αλυσίδας (chain rule) — γνωστό θεώρημα.

ε) **Λάθος.** Η σωστή παράγωγος είναι $(\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$ (λείπει το μείον).

⚠️ Συχνό Λάθος

Πρόσεξε ιδιαίτερα τη διατύπωση του (α): «αν και μόνο αν ΥΠΑΡΧΟΥΝ» , αυτό αντιστρέφει τον ορισμό της 1-1. Στο (ε) η $\sigma\varphi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \;\Longrightarrow\; (\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$ (αρνητικό).

💡 Εξεταστική Συμβουλή

Στα Σ/Λ με παράγωγο τριγωνομετρικής, πάντα επαληθεύεις τον τύπο.

Η $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ (θετική), η $(\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$ (αρνητική).

✅ Τι έπρεπε να προσέξεις

Το Θέμα Α είναι θεωρία: απόδειξη ($f'=0 \;\Longrightarrow$ σταθερή), κριτήριο παρεμβολής, ορισμός παράγουσας και Σ/Λ (Λ,Σ,Σ,Σ,Λ) — σίγουρες μονάδες.

ΘΕΜΑ Β Σύνθεση συναρτήσεων, αντίστροφη, όριο

Δίνονται: $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2\ln(x-1)$ και $g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x-2}+1$.

Β1 — Προσδιορισμός h = f∘g

🎯 Τι εξετάζει

Εύρεση πεδίου ορισμού και τύπου της σύνθεσης $h=f\circ g$.

📚 Θεωρία που χρησιμοποιείται

Πεδίο ορισμού σύνθεσης: $A_h=\{x\in A_g : g(x)\in A_f\}$.

✍️ Αναλυτική Λύση

Πρέπει $x\in D_g=[2,+\infty)$ και $g(x)\in D_f=(1,+\infty) \Leftrightarrow g(x)>1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}+1>1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}>0$ $\Leftrightarrow x>2$.

$$h(x)=f(g(x))=2\ln(g(x)-1)=2\ln\left(\sqrt{x-2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln(x-2)$$

Άρα $h(x)=\ln(x-2), x\in(2,+\infty)$.

⚠️ Συχνό Λάθος

Ο περιορισμός $g(x)>1$ δίνει $x>2$ (όχι $x\geq 2$).

Στην απλοποίηση: $2\ln\sqrt{x-2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln(x-2)=\ln(x-2)$.

💡 Εξεταστική Συμβουλή

Χρησιμοποίησε τον τύπο $2\ln\sqrt{u}=\ln u$ για να απλοποιήσεις γρήγορα.

Β2 — Αντιστρεψιμότητα & εύρεση h^{-1}

🎯 Τι εξετάζει

Απόδειξη αντιστρεψιμότητας της h (μονάδες 3) και εύρεση του τύπου της αντίστροφης h^{-1} (μονάδες 6).

✍ **Αναλυτική Λύση**

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0, x > 2$$

Η h γνησίως αύξουσα $\Longrightarrow$ 1-1 $\Longrightarrow$ αντιστρέφεται.

Σύνολο τιμών: $\lim\limits_{x\to 2+} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty \Longrightarrow h((2,+\infty)) = \mathbb{R}$. Λύνουμε $y = \ln(x-2)$:

$$x - 2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.

⚠ **Συχνό Λάθος**

$h' > 0 \Longrightarrow$ γνησίως αύξουσα $\Longrightarrow$ 1-1. Μην ξεχάσεις να υπολογίσεις το σύνολο τιμών ($\mathbb{R}$) πριν γράψεις τον τύπο.

💡 **Εξεταστική Συμβουλή**

Εκθετικοποίησε: από $\ln(x-2) = y$ παίρνεις αμέσως $x - 2 = e^y$.

B3 — Υπολογισμός ορίου

🎯 **Τι εξετάζει**

Υπολογισμός του ορίου $\lim\limits_{x\to 2+} h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}$.

📚 **Θεωρία που χρησιμοποιείται**

Βασικό όριο: $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

✍️ Αναλυτική Λύση

$$\lim_{x\to 2+} h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \ln(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}$$

Θέτουμε $t = x-2, t \to 0+$:

$$= \lim_{t\to 0+} \ln t\cdot\frac{2\ln(t+1)}{t}$$

Ο παράγοντας $\frac{2\ln(1+t)}{t} \to 2\cdot 1 = 2$ (βασικό όριο). Ο πρώτος: $\ln t \to -\infty$.

Γινόμενο: $(-\infty)\cdot 2 = -\infty$

⚠️ Συχνό Λάθος

Πρόσεξε τη μορφή: δεν είναι $\frac{0}{0}$ ούτε $\frac{\infty}{\infty}$, αλλά γινόμενο $(-\infty)\cdot$ (πεπερασμένο μη μηδέν), που δίνει $-\infty$.

💡 Εξεταστική Συμβουλή

Η αντικατάσταση $t = x-2$ καθαρίζει τα πράγματα: εμφανίζεται το βασικό όριο $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$.

✅ Τι έπρεπε να προσέξεις

- B1: περιορισμός g(x)>1 δίνει x>2 (αυστηρά), και 2ln√u = ln u.
- B2: h′>0 ⟹ αντιστρέφεται· σύνολο τιμών = ℝ.
- B3: γινόμενο (−∞)·2 = −∞ (ΟΧΙ απροσδιόριστη μορφή).

ΘΕΜΑ Γ Παράμετροι, μονοτονία/ακρότατα, σύνολο τιμών, ολοκληρωτική ακολουθία

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$, $\kappa,\mu\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, και
- η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων.

Γ1 — κ = 0 και μ = 1

🎯 Τι εξετάζει

Εύρεση των παραμέτρων κ,μ χρησιμοποιώντας τη συμπεριφορά στο $+\infty$ και την εφαπτομένη στην αρχή.

✍️ Αναλυτική Λύση

i) Αν $\kappa\neq 0$: πολυωνυμική διαίρεση δίνει $f(x)=\kappa x+\dfrac{(\mu-\kappa)x}{x^2+1}$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη). Αντίφαση $\Longrightarrow \kappa=0$.

ii) Με $\kappa=0$: $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$. Αφού $f(0)=0$, η $y=x$ περνά από την αρχή. Η εφαπτομένη στο (0,0) έχει κλίση $f'(0)$:

$$f'(x)=\frac{\mu\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}, f'(0)=\mu$$

Η $y=x$ εφάπτεται $\Longrightarrow f'(0)=1 \Longrightarrow \mu=1$. Τελικά $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

⚠️ Συχνό Λάθος

Αν $\kappa\neq 0$ τότε ο βαθμός αριθμητή (3) > βαθμός παρονομαστή (2), οπότε δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη. Η αντίφαση δίνει αμέσως $\kappa=0$.

💡 Εξεταστική Συμβουλή

Η εφαπτομένη $y=x$ στο $(0,0)$ σημαίνει $f(0)=0$ (ικανοποιείται αυτομάτως) ΚΑΙ $f'(0)=1$ (δίνει μ).

Γ2 — Μονοτονία, ακρότατα, σύνολο τιμών, πλήθος ριζών

🎯 Τι εξετάζει

Πλήρης μελέτη μονοτονίας/ακροτάτων, απόδειξη συνόλου τιμών $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, και πλήθος ριζών εξίσωσης $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$.

✍ Αναλυτική Λύση

i) Παράγωγος:

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}, f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

x	(−∞, −1)	−1	(−1, 1)	1	(1, +∞)
f′(x)	−	0	+	0	−
f	↘	min	↗	max	↘

Ολικό ελάχιστο $f(-1)=\frac{-1}{2}$, ολικό μέγιστο $f(1)=\frac{1}{2}$. Με $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

ii) Αφού $f(-1)=-\frac{1}{2}$ (ολικό ελάχιστο), $f(1)=\frac{1}{2}$ (ολικό μέγιστο), $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ και η f συνεχής, από το Θ.Μ.Τ. (Θ. Ενδιάμεσων Τιμών):

$$f(\mathbb{R})=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

iii) Η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$: αφού $\alpha^2\geq 0 \implies \frac{1}{2}+\alpha^2\geq\frac{1}{2}$.

- Αν $\alpha=0$: $f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1 \implies$ **1 ρίζα.**
- Αν $\alpha\neq 0$: $\frac{1}{2}+\alpha^2>\frac{1}{2}\notin f(\mathbb{R}) \implies$ **0 ρίζες.**

⚠ Συχνό Λάθος

Η τιμή $\frac{1}{2}+\alpha^2$ ξεπερνά το μέγιστο $\frac{1}{2}$ μόνο αν $\alpha\neq 0$. Όταν $\alpha=0$ η εξίσωση δίνει ακριβώς μία (διπλή) ρίζα $x=1$.

💡 **Εξεταστική Συμβουλή**

Χρησιμοποίησε το σύνολο τιμών $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ για να αποκλείσεις αμέσως τη λύση όταν $\frac{1}{2}+\alpha^2>\frac{1}{2}$

.

Γ3 — Ολοκληρωτική ακολουθία I_ν

🎯 **Τι εξετάζει**

Ορισμός $I_\nu=\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx$. Απόδειξη αναδρομικής σχέσης και υπολογισμός I_0, I_1, I_2.

✍ **Αναλυτική Λύση**

i) Άθροισμα $I_\nu+I_{\nu+1}$:

$$I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\left(1+x^2\right)}{x^2+1}dx$$

$$=\int_0^1 x^{2\nu+1}dx=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1=\frac{1}{2\nu+2}$$

ii) Υπολογισμός:

$$I_0=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

Από $I_0+I_1=\frac{1}{2}$ ($\nu=0$): $I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1-ln2}{2}$

Από $I_1+I_2=\frac{1}{4}$ ($\nu=1$): $I_2=\frac{1}{4}-\frac{1-ln2}{2}=\frac{2ln2-1}{4}$

⚠ **Συχνό Λάθος**

Η παραγοντοποίηση $x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}=x^{2\nu+1}\left(1+x^2\right)$ απλοποιεί ΟΛΟΚΛΗΡΟ τον παρονομαστή $\left(x^2+1\right)$. Το κλειδί!

💡 **Εξεταστική Συμβουλή**

Υπολόγισε πρώτα I_0 (απλό ολοκλήρωμα), μετά χρησιμοποίησε την αναδρομική σχέση $I_\nu+I_{\nu+1}=\frac{1}{2\nu+2}$ για $\nu=0,1$.

Τι έπρεπε να προσέξεις

- Γ1: $\kappa=0$ (ασύμπτωτη) + $\mu=1$ (εφαπτομένη) $\Longrightarrow$ $f(x) = x/(x^2+1)$.
- Γ2: σύνολο τιμών $[-1/2, 1/2]$· για $\alpha\neq 0$ η εξίσωση δεν έχει λύση.
- Γ3: x^{2ν+1}$(1+x^2)/(x^2+1)$ = x^{2ν+1} — κομψή απλοποίηση.

ΘΕΜΑ Δ Μοναδική ρίζα, παράμετρος, ανισότητα, εμβαδόν

Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0<g(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και
- $g'(x)\neq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1 — Μοναδικό $x_1\in(-1,0)$ με $g(x_1)+x_1=0$

Τι εξετάζει

Απόδειξη ύπαρξης (Bolzano) και μοναδικότητας (μονοτονία $\varphi=g+x$).

Θεωρία που χρησιμοποιείται

Θ. Bolzano: f συνεχής στο [a,b] με f(a)·f(b)<0 ⟹ ∃ ρίζα. Μοναδικότητα: f′≠0 ⟹ γνησίως μονότονη ⟹ μία μόνο ρίζα.

Αναλυτική Λύση

Θεωρούμε $\varphi(x)=g(x)+x$. Η φ είναι συνεχής (g παραγωγίσιμη ⟹ συνεχής).

- $\varphi(-1)=g(-1)-1$: αφού $0<g(-1)<1 \implies \varphi(-1)\in(-1,0) \implies \varphi(-1)<0$.
- $\varphi(0)=g(0)$: αφού $0<g(0)<1 \implies \varphi(0)>0$.

Από Θ. Bolzano ⟹ υπάρχει $x_1\in(-1,0)$ με $\varphi(x_1)=g(x_1)+x_1=0$.

Μοναδικότητα: $\varphi'(x)=g'(x)+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (δεδομένο). Αφού φ' συνεχής και ποτέ μηδέν, η φ γνησίως μονότονη ⟹ η ρίζα x_1 μοναδική.

Συχνό Λάθος

Πρόσεξε: $g'(x)\neq -1$ σημαίνει $\varphi'(x)=g'(x)+1\neq 0$, που εγγυάται γνήσια μονοτονία. Χωρίς αυτό η μοναδικότητα δεν βγαίνει.

Εξεταστική Συμβουλή

Η $\varphi(-1)<0$ και $\varphi(0)>0$ δίνουν τη ρίζα στο $(-1,0)$. Δεν χρειάζεται να βρεις αριθμητική τιμή!

Δ2 — κ = 3

🎯 Τι εξετάζει

Εύρεση της παραμέτρου κ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

✍️ Αναλυτική Λύση

Η f πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο 0, δηλ. τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής ίσα. Με $f(0)=0$:

Αριστερό ($x \to 0-$):

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2\left(g(x)+x\right)}{x}=\lim_{x\to 0-}x\cdot\left(g(x)+x\right)=0\cdot g(0)=0$$

Δεξιό ($x \to 0+$):

$$\lim_{x\to 0+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x}{x}=2\cdot 1+1-\kappa=3-\kappa$$

(χρησιμοποιώντας $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}=1$).

Ισότητα: $0=3-\kappa \Leftrightarrow \kappa=3$.

⚠️ Συχνό Λάθος

Τα όρια $\frac{\eta\mu x}{x}\to 1$ και $\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\to 1$ είναι απαραίτητα εδώ. Μην τα θεωρείς δεδομένα — αναφέρεις ρητά ότι τα χρησιμοποιείς.

💡 Εξεταστική Συμβουλή

Το αριστερό όριο είναι 0 (επειδή πολλαπλασιάζεται με $x\to 0$). Η εξίσωση κ βγαίνει μόνο από το δεξιό.

Δ3 — f(x) ≥ 0 στο [0,π/2) & 3f(x) = π μοναδική ρίζα

🎯 Τι εξετάζει

Απόδειξη ότι $f\geq 0$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ μέσω $f'>0$, και ύπαρξη/μοναδικότητα ρίζας της $3f(x)=\pi$.

✍️ Αναλυτική Λύση

Με $\kappa = 3$: $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Είναι $f(0) = 0$ και

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3$$

i) Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x \in (0,1]$ και $y(u) = 2u + \frac{1}{u^2} - 3$. Τότε

$$y'(u) = 2 - \frac{2}{u^3} = \frac{2(u^3 - 1)}{u^3} < 0, u \in (0,1)$$

Η y γνησίως φθίνουσα στο (0,1] με $y(1) = 2 + 1 - 3 = 0 \implies y(u) > 0$ για κάθε $u \in (0,1)$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Αφού $f(0) = 0$ και $f' > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies$ η f γνησίως αύξουσα $\implies f(x) \geq 0$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (ισότητα μόνο στο 0).

ii) $f(0) = 0$, $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$ (αφού $\varepsilon\varphi x \to +\infty$). Αφού $\frac{\pi}{3} \in (0, +\infty)$, από Θ. Ενδιάμεσων Τιμών + μονοτονία: η $f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει **ακριβώς μία ρίζα** $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

⚠️ Συχνό Λάθος

Το κλειδί: η αντικατάσταση $u = \sigma\upsilon\nu x$ μετατρέπει τη f' σε $y(u) = 2u + \frac{1}{u^2} - 3$, φθίνουσα με $y(1) = 0$. Αυτό δίνει $f' > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

💡 Εξεταστική Συμβουλή

Μην ξεχάσεις: $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f = +\infty$ (η $\varepsilon\varphi x \to +\infty$ κυριαρχεί). Αυτό εξασφαλίζει ότι η τιμή $\frac{\pi}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών.

Δ4 — $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$ & ολοκλήρωμα ίσων εμβαδών

🎯 **Τι εξετάζει**

Δ4i: $f \geq 0$ στο $\left[x_1, 0\right]$.

Δ4ii: Ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία — εύρεση $\int x^3 g'(x)\,dx$.

✍️ Αναλυτική Λύση

i) Στο $(-\infty,0)$: $f(x)=x^2(g(x)+x)=x^2\cdot\varphi(x)$ όπου $\varphi(x)=g(x)+x$. Αφού $\varphi(x_1)=0$, $\varphi(0)=g(0)>0$ και $\varphi'(x)=g'(x)+1\neq 0$ (γνησίως μονότονη · πάει από 0 σε θετικό $\Longrightarrow$ αύξουσα) $\Longrightarrow$ $\varphi(x)\geq 0$ στο $[x_1,0]$. Μαζί με $x^2\geq 0$ $\Longrightarrow$ $f(x)\geq 0$.

ii) Χωρίο Ω: από $x=x_1$ έως $x=f(x_2)=\frac{\pi}{3}$ (αφού $f(x_2)=\frac{\pi}{3}$), ανάμεσα στην C_f και τον άξονα x′x. Ο άξονας y′y ($x=0$) χωρίζει σε δύο ίσα εμβαδά.

Δεξιό εμβαδόν:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)\,dx$$

$$=\left[-2\sigma\upsilon\nu x-ln|\sigma\upsilon\nu x|-\frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(-1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}\right)-(-2)=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}$$

Ίσα εμβαδά $\Longrightarrow$ αριστερό = δεξιό:

$$\int_{x_1}^{0}x^2g(x)\,dx+\int_{x_1}^{0}x^3\,dx=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_{x_1}^{0}x^2g(x)\,dx=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}+\frac{x_1^{\,4}}{4}$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες ($u=x^3, dv=g'(x)\,dx$):

$$\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)\,dx=\left[x^3g(x)\right]_{x_1}^{0}-3\int_{x_1}^{0}x^2g(x)\,dx$$

Αφού $g(x_1)=-x_1$ (Δ1) $\Longrightarrow$ $\left[x^3g(x)\right]=0-x_1^{\,3}(-x_1)=x_1^{\,4}$.

Αντικαθιστώντας:

$$\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)\,dx=x_1^{\,4}-3\left(1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}+\frac{x_1^{\,4}}{4}\right)$$

$$=x_1^{\,4}-3-3\ln 2+\frac{\pi^2}{2}-\frac{3x_1^{\,4}}{4}$$

$$=\frac{x_1^{\,4}}{4}+\frac{\pi^2}{2}-3\ln 2-3$$

⚠️ Συχνό Λάθος

Στο $\left[x^3g(x)\right]$: πρόσεξε $g(x_1)=-x_1$ (από Δ1). Στο δεξιό ολοκλήρωμα: $\int\varepsilon\varphi x\,dx=-\ln|\sigma\upsilon\nu x|$, πρόσεξε το πρόσημο.

Εξεταστική Συμβουλή

Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες μετατρέπει $\int x^3 g'$ σε $\left[x^3 g\right] - 3\int x^2 g$, που ήδη υπολόγισες.

Τι έπρεπε να προσέξεις

- Δ1: Bolzano + $\varphi' \neq 0 \Longrightarrow$ μοναδική ρίζα στο $(-1,0)$.
- Δ2: ημx/x→1 και εφx/x→1 δίνουν $\kappa=3$.
- Δ3: αντικατάσταση $u=$συνx: $y(u)=2u+1/u^2-3$ φθίνουσα, $y(1)=0 \Longrightarrow f'>0$.
- Δ4: δεξιό εμβαδόν $= 1+\ln 2-\pi^2/6$· ολοκλήρωση κατά παράγοντες για $\int x^3 g'$.

Ανασκόπηση Εξετάσεων 2026

Το βοήθημα καλύπτει τις Κανονικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2026 (03/06/2026) στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ′ Λυκείου.

Κατάλογος Θεωρημάτων

Κανονικές (03/06/2026)

- Πόρισμα Θ.Μ.Τ.: $f'=0 \Rightarrow f$ σταθερή (Α1)· Κριτήριο Παρεμβολής (Α2)· Ορισμός παράγουσας (Α3).
- Σύνθεση συναρτήσεων & πεδίο ορισμού $f \circ g$ (Β1).
- Γνήσια μονοτονία ⇒ αντιστρεψιμότητα & εύρεση h^{-1} (Β2)· Υπολογισμός ορίου (Β3).
- Βαθμός αριθμητή/παρονομαστή & οριζόντια ασύμπτωτη· εφαπτομένη ⇒ παράμετροι (Γ1).
- Μονοτονία/ακρότατα, σύνολο τιμών, πλήθος ριζών εξίσωσης (Γ2).
- Ολοκληρωτική ακολουθία I_ν: αναδρομική σχέση & I_0, I_1, I_2 (Γ3).
- Θ. Bolzano + μονοτονία ⇒ μοναδική ρίζα (Δ1)· πλευρικές παράγωγοι ⇒ κ (Δ2).
- $f'>0$ μέσω αντικατάστασης $u=$συνx (Δ3)· ίσα εμβαδά & ολοκλήρωση κατά παράγοντες (Δ4).

Δείκτης Δυσκολίας

Κανονικές (03/06/2026)

Θέμα Α	★☆☆☆☆	Θεωρία (πόρισμα Θ.Μ.Τ., κριτήριο παρεμβολής, ορισμός, Σ/Λ) — σίγουρες μονάδες.
Θέμα Β	★★☆☆☆	Σύνθεση, αντίστροφη, όριο — τυπικά θέματα χωρίς δυσκολία.
Θέμα Γ	★★★☆☆	Παράμετροι, ολοκληρωτική ακολουθία — κομψές αλλά μεθοδικές ασκήσεις.
Θέμα Δ	★★★★★	Σύνθετο: πολλαπλές παράμετροι, αντικατάσταση u=συνx, ίσα εμβαδά, ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Χώρος Σημειώσεων

PaideiaNet
.com

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΒΟΗΘΗΜΑ • Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Πανελλαδικές Εξετάσεις 2026

Ένα ολοκληρωμένο βοήθημα που αναλύει βήμα προς βήμα τις λύσεις των θεμάτων, με μεθοδολογία, θεωρία και εξεταστικές παρατηρήσεις — για να φτάσεις στις εξετάσεις με σιγουριά.

Τι θα βρεις μέσα

- Πλήρεις αναλυτικές λύσεις σε όλα τα θέματα (Α, Β, Γ, Δ) και των δύο εξεταστικών περιόδων.
- Θεωρία, ορισμοί και θεωρήματα του σχολικού βιβλίου σε κάθε ερώτημα.
- Συχνά λάθη μαθητών και πρακτικές εξεταστικές & βαθμολογικές συμβουλές.

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ
03/06/2026

«Προετοιμάσου σωστά, ξεχώρισε στις εξετάσεις!»

PaideiaNet.com

P A I D E I A N E T . C O M